به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل اول-اعداد مختلط

فعالیت ۱ (معادله درجه دو). معادله درجه دو $x^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید. با قرار دادن $x = t - b/2$ جواب‌های معادله را برحسب ضرایب حساب کنید.

فعالیت ۲ (معادله درجه سه). معادله درجه سه $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید.

الف) ابتدا $x = t - a/3$ قرار دهید.

ب) $t = u + v$ قرار دهید و به دست آورید که $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.

ج) فرض می‌کنیم $uv = -p/3$. معادله درجه دویی بنویسید که ریشه‌های آن u^3 و v^3 باشد.

د) با توجه به قسمت (ج) جوابی برای معادله درجه سه بدست آورید.

ه) با استفاده از فرمول بدست آمده از قسمت (ج) ریشه‌های معادله $x^3 - 3x + 2 = 0$ را بیابید. این معادله چند ریشه حقیقی دارد؟ چند ریشه از فرمول بدست می‌آید؟

و) با استفاده از فرمول بدست آمده از قسمت (ج) ریشه‌های معادله $x^3 - 6x + 4 = 0$ را بدست آورید. این معادله چند ریشه حقیقی دارد؟ چند ریشه از فرمول بدست می‌آید؟

فعالیت ۳ (تعریف اعداد مختلط). همانطور که در فعالیت پیش مشاهده کردیم، مسئله اصلی در پیدا کردن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها پیدا شدن $\sqrt{-1}$ است. در این فعالیت سعی خواهیم کرد به صورت فرمال و جبری اعداد حقیقی را گسترش بدهیم تا شاید بتوان مشکل به وجود آمده در قسمت (و) فعالیت ۲ را برطرف کرد. همانطور که اعداد حقیقی را متناظر با خط حقیقی فرض کردیم. بیایید صفحه را نیز متناظر با اعداد در نظر بگیریم. بنابراین فرض می‌کنیم که هر مختصات (x, y) متناظر با یک عدد است!

الف) جمعی تعریف کنید که وقتی $y = 0$ است با جمع اعداد حقیقی یکی باشد. آیا این جمع خواص جمع در اعداد حقیقی را داراست؟ به طور مثال شرکت‌پذیر یا جابه‌جایی است؟

ب) اگر ضرب دو عدد (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را به صورت مؤلفه‌ای تعریف کنیم؛ بدین معنی که
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2).$$

این ضرب با ضرب در اعداد حقیقی سازگار است، بدین معنی ضرب دو عدد حقیقی (دو عدد روی محور xها) درست مثل قبل است. اما این ضرب مشکلات دیگری دارد؛ به عنوان مثال دو عدد ناصفر پیدا کنید که ضرب‌شان صفر شود. در واقع چنین اعدادی وارون (ضربی) ندارند.

ج) برای یافتن ضرب مناسب برای این صفحه، ابتدا نقطه‌ای را پیدا کنید و یا پیشنهاد دهید که به نظرتان قرار است جذر عدد ۱− باشد.

د) با توجه به اینکه ضرب در اعداد حقیقی، صرف نظر از جهت آن، ضرب اندازه‌هاست (منظور از اندازه فاصله از مبدأ است)، بیایید فرض کنیم که ضربی که می‌خواهیم برای این صفحه تعریف کنیم نیز این خاصیت را دارد. برای اندازه اعداد در این صفحه نیز اندازه معمول که از رابطه فیثاغورس می‌آید را در نظر می‌گیریم. به نظرتان چه اتفاقی بر سر جهت دو عدد باید بیاید تا ضرب خوبی(!) داشته باشیم؟ مثلا ضرب دو عدد که در محور xها هستند(دو عدد حقیقی)، باید در محور xها بمانند. به نظرتان چه اتفاقی برای ضرب دو عدد در محور yها باید بیافتد؟ در نهایت پیشنهادتان برای ضرب دو عدد در این صفحه چیست؟ آیا این پیشنهاد با ضرب در اعداد حقیقی، سازگار است؟ آیا همان خواص ضرب در اعداد حقیقی را داراست؟ به طور مثال خاصیت شرکت‌پذیری و یا جابه‌جایی دارد؟

ه) اگر $\sqrt{-۱}$ را i بنامیم. می‌توان اعداد این صفحه جدید را با $a + bi$ نمایش داد که a و b اعداد حقیقی هستند. جمع و ضربی که یافته‌اید را در نمایش جدید بازنویسی کنید.

و) مسئله قسمت (و) فعالیت ۲ را دوباره بررسی کنید. آیا می‌توانید مشکل را برطرف کنید؟ یا باید بیشتر در مورد اعداد جدید جستجو کنید؟!

تعریف ۱. مجموعه اعدادی که در بالا تعریف کردیم را مجموعه اعداد مختلط می‌نامند و با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهند؛ به عبارت دیگر

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

فعالیت ۴ (کمی بیشتر درباره اعداد مختلط).

تعریف ۲. اندازه یک عدد مختلط $z = a + bi$ به صورت $|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ و مزدوج آن به صورت $\bar{z} = a - bi$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳. هر عدد ناصفر $z = (a, b)$ در صفحه مختلط نمایشی به صورت (r, θ) دارد که در آن $r = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ و $\theta = \arcsin(b/r)$ است. به این نمایش مختصات قطبی می‌گویند که در فعالیت ۳ از آن برای تعریف ضرب اعداد مختلط استفاده کردیم. همچنین به θ آرگومان z می‌گویند و با $\arg(z)$ نمایش می‌دهند.

الف) نشان دهید هر عدد مختلط مخالف صفری وارون دارد و وارون آن را برحسب مزدوج و اندازه آن بنویسید.

ب) با استفاده از مختصات قطبی، همه اعداد مختلط مانند z را بیابید که $z^3 = 1$.

ج) با استفاده از مختصات قطبی، برای هر عدد طبیعی n، همه اعداد مختلط مانند z را بیابید که $z^n = 1$.

د) همه اعداد مختلطی را بیابید که $z^3 = 1 + i$.

ه) برای $z_0 \in \mathbb{C}$ در نظر گرفته شده، همه اعداد مختلطی را بیابید که $z^n = z_0$.

و) اگر $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$، z^n را محاسبه کنید.